第 2 节 空间向量的应用：证平行、垂直与求角（★★★）

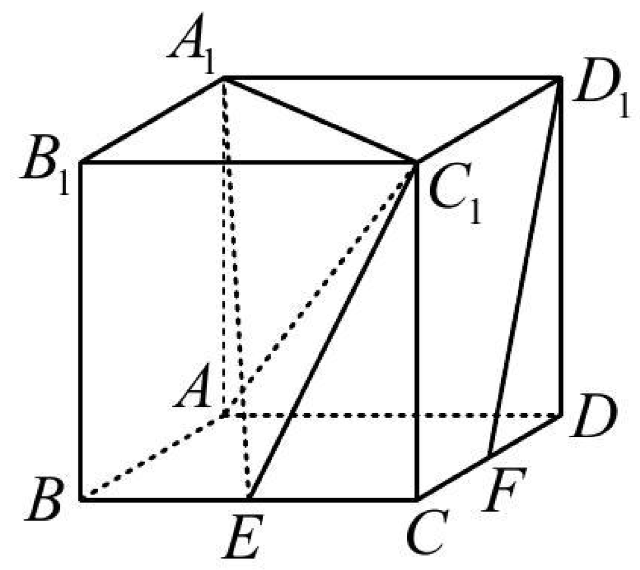
强化训练

1.（2021・天津卷・★★）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 BC，CD 的中点.

（1）求证：D_1F // 平面 A_1EC_1；

（2）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值；

（3）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值.



解：（1）（本题用几何法可做，但观察发现后面两问要用平面 A_1EC_1 的法向量，故不妨第 1 问就用向量法证）

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,2)$，$E(2,1,0)$，$C_1(2,2,2)$，$D_1(0,2,2)$，$F(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{D_1F}=(1,0,-2)$，设平面 A_1EC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x+2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=y+2z=0\end{cases}$，令 $x=2$，则 $\begin{cases}y=-2\\ z=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$ 是平面 A_1EC_1 的一个法向量，

因为 $\overrightarrow{D_1F}\cdot\boldsymbol{n}=1\times2+0\times(-2)+(-2)\times1=0$，且 $D_1F\not\subset$ 平面 A_1EC_1，所以 D_1F // 平面 A_1EC_1.

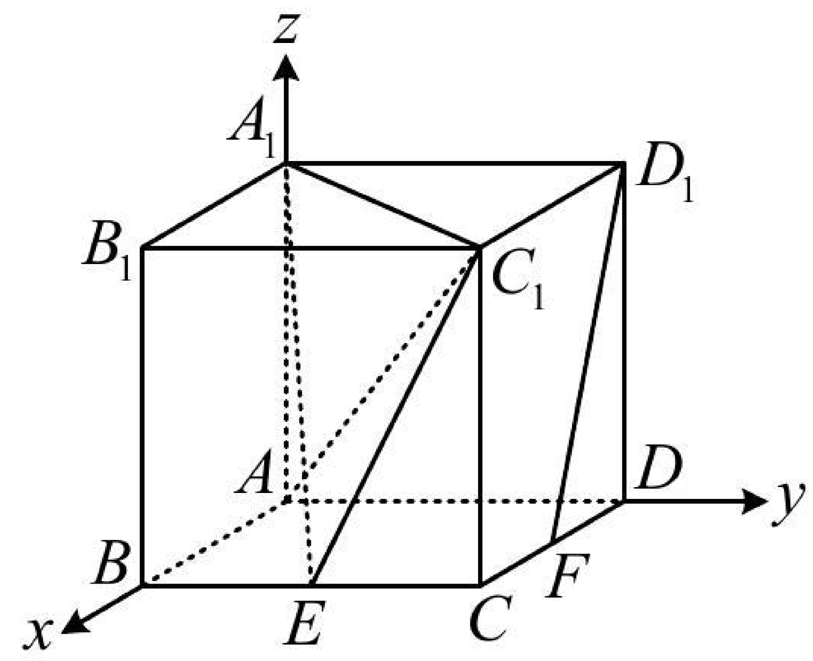
（2）由图可知，$\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$，由（1）知 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$ 是平面 A_1EC_1 的一个法向量，

因为 $\left|\cos<\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，所以直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

（3）$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，设平面 AA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=2z'=0 & ①\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=2x'+2y'+2z'=0 & ②\end{cases}$

将①代入②化简得：$x'+y'=0$，令 $x'=1$，则 $y'=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$ 是平面 AA_1C_1 的一个法向量，

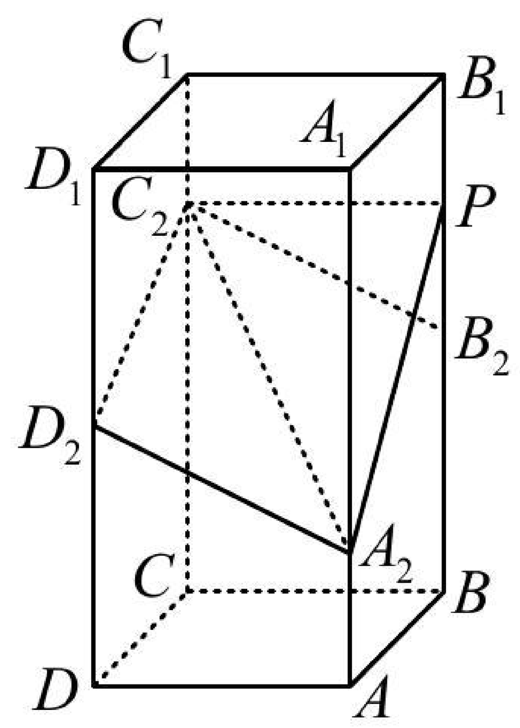
从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{2\sqrt{2}}{3})^2}=\dfrac{1}{3}$.



2．（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$．点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$．

（1）证明：$B_2C_2 \parallel A_2D_2$；

（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时，求 B_2P．



解：（1）（正四棱柱底面为正方形，侧棱垂直于底面，故天然就有三条两两垂直的直线，可建系证明）

以 C 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B_2(0,2,2)$，$C_2(0,0,3)$，$A_2(2,2,1)$，$D_2(2,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，故 $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{A_2D_2}$，

由图可知直线 B_2C_2 与 A_2D_2 不重合，所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$．

（2）（点 P 在棱 BB_1 上运动时，只有 z 坐标会变，故可直接设其坐标，用于计算平面 PA_2C_2 的法向量）

设 $P(0,2,a)(0\le a\le 4)$，则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{C_2P}=(0,2,a-3)$，$\overrightarrow{C_2D_2}=(2,0,-1)$，

设平面 PA_2C_2 和平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2x_1-2y_1+2z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_2P}=2y_1+(a-3)z_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=a-3$，则 $\begin{cases}x_1=1-a\\ z_1=-2\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{m}=(1-a,a-3,-2)$ 是平面 PA_2C_2 的一个法向量，

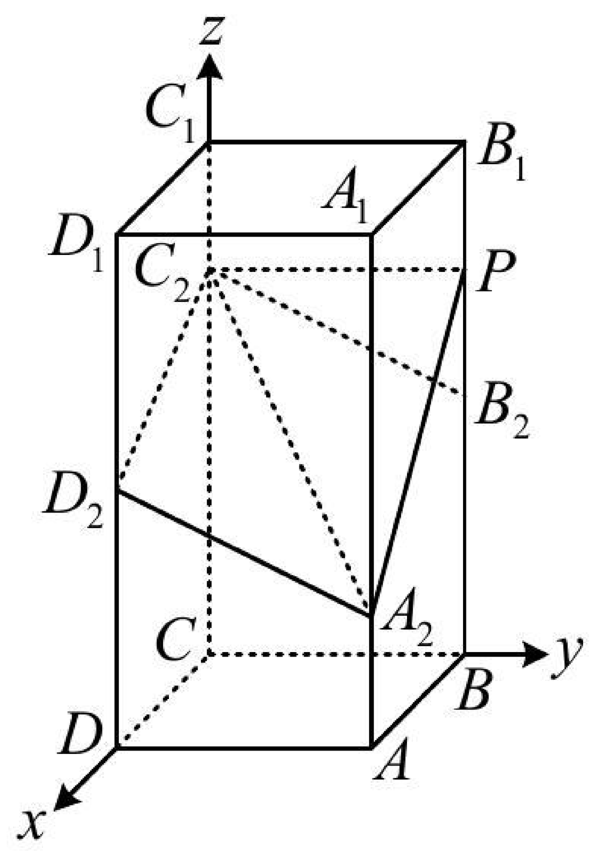
$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2x_2-2y_2+2z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_2D_2}=2x_2-z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $\begin{cases}y_2=1\\ z_2=2\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$ 是平面 $A_2C_2D_2$ 的一个法向量，

因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150°，

所以 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|1-a+a-3-4|}{\sqrt{(1-a)^2+(a-3)^2+4}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

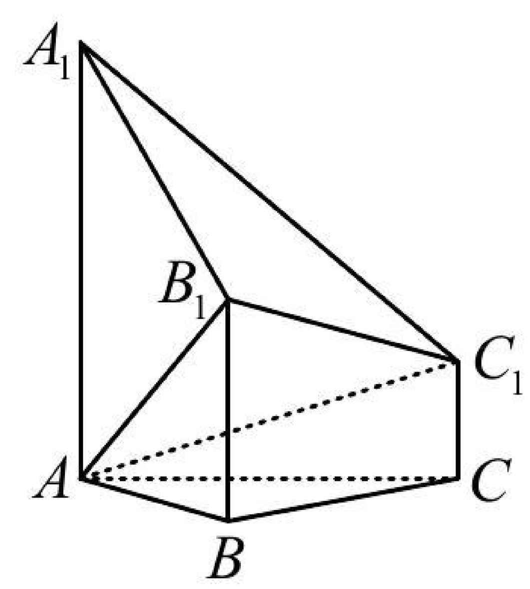
解得：$a=3$ 或 1，所以 $B_2P=|a-2|=1$.



3.（2018 •浙江 •★★★）如图，已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$，A_1A，B_1B，C_1C 均垂直于平面 ABC，$\angle ABC=120^{\circ}$，$A_1A=4$，$C_1C=1$，$AB=BC=B_1B=2$.

（1）证明：$AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.



解：（1）（要证结论，只需证 $AB_1\perp A_1B_1$ 和 $AB_1\perp A_1C_1$，几何法能证，但偏麻烦，考虑到有线面垂直，容易建系，故直接建系，用数量积来证这两个线线垂直）

取 AC 中点 O，连接 OB，因为 $AB=BC$，所以 $AC\perp OB$，

因为 $\angle ABC=120^{\circ}$，所以 $\angle ABO=60^{\circ}$，故 $OB=AB\cdot\cos\angle ABO=1$，$OA=AB\cdot\sin\angle ABO=\sqrt{3}$，$OC=\sqrt{3}$，以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-\sqrt{3},0)$，$A_1(0,-\sqrt{3},4)$，$B_1(1,0,2)$，$C_1(0,\sqrt{3},1)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(1,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,2\sqrt{3},-3)$，

从而 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=1\times1+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+2\times(-2)=0$，

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=1\times0+\sqrt{3}\times2\sqrt{3}+2\times(-3)=0$，

故 $AB_1\perp A_1B_1$，$AB_1\perp A_1C_1$，因为 A_1B_1，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1B_1\cap A_1C_1=A_1$，所以 $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

（2）由（1）可得 $B(1,0,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2\sqrt{3},1)$，

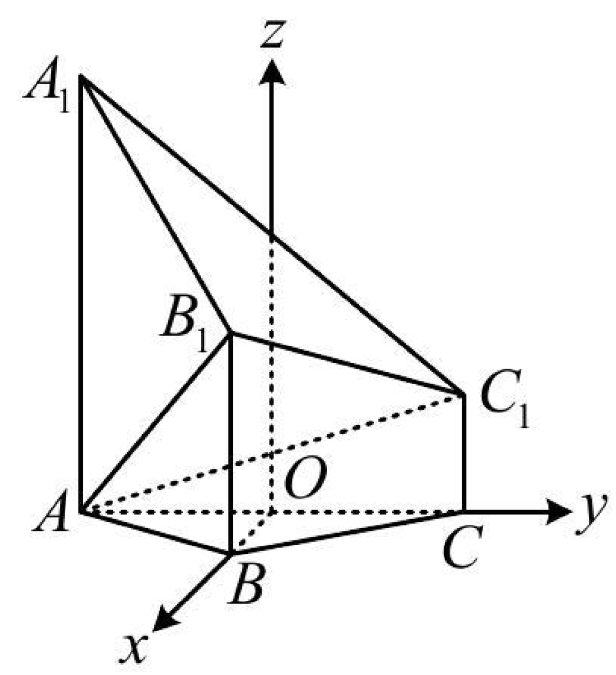
设平面 ABB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x+\sqrt{3}y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=2z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $\begin{cases}y=-1\\ z=0\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,0)$ 是平面 ABB_1 的一个法向量，

从而 $\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC_1}>\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}\right|}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$，

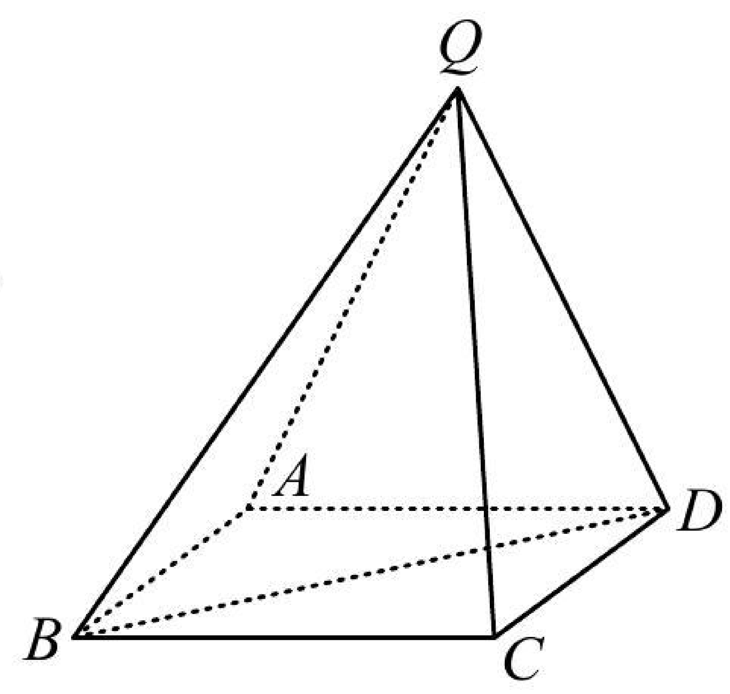
故直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.



4.（2021・新高考Ⅱ卷・★★★）在四棱锥 $Q-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$AD=2$，$QD=QA=\sqrt{5}$，$QC=3$.

（1）证明：平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值.



解：（1）（要证面面垂直，先找线面垂直，由逆推法可知只需在一个面内找交线的垂线，由于有 $QD=QA$，且考虑到第（2）问建系需要找 Q 在面 $ABCD$ 内的射影，故想到取 AD 中点 O，证 $AO\perp$ 面 $ABCD$）

取 AD 中点 O，连接 OQ，OC，因为 $QD=QA=\sqrt{5}$，所以 $OQ\perp AD$ ①，

（余下条件皆为长度，用长度证垂直，想到勾股定理，可通过验证 ΔQOC 满足勾股定理来证 $OQ\perp OC$）

因为 $AD=2$，所以 $OA=1$，$OQ=\sqrt{QA^2-OA^2}=2$，

又 $OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{5}$，所以 $OQ^2+OC^2=9=QC^2$，故 $OQ\perp OC$ ②，

由①②结合 AD，OC 是平面 $ABCD$ 内的相交直线可得 $OQ\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $OQ\subset$ 平面 QAD，所以平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$.

（2）以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $Q(0,1,2)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{QD}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$，

设平面 QBD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

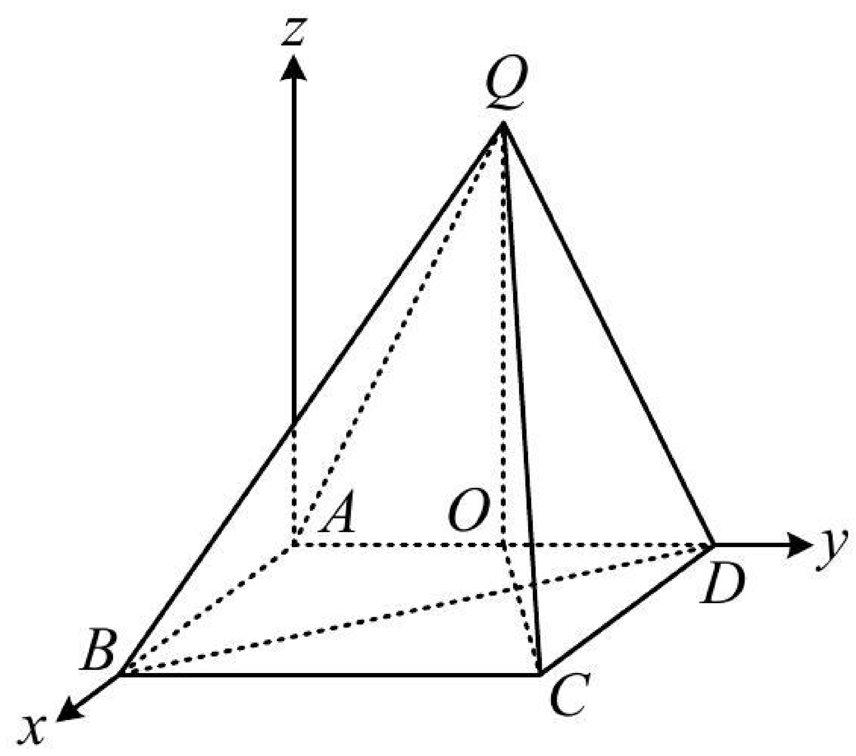
则$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x+2y=0 \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{QD}=y-2z=0 \end{cases}$，令$x=2$，则$\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$，

所以$\boldsymbol{m}=(2,2,1)$是平面 QBD 的一个法向量，

显然平面 ADQ 的一个法向量是$\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，

从而$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3}$，

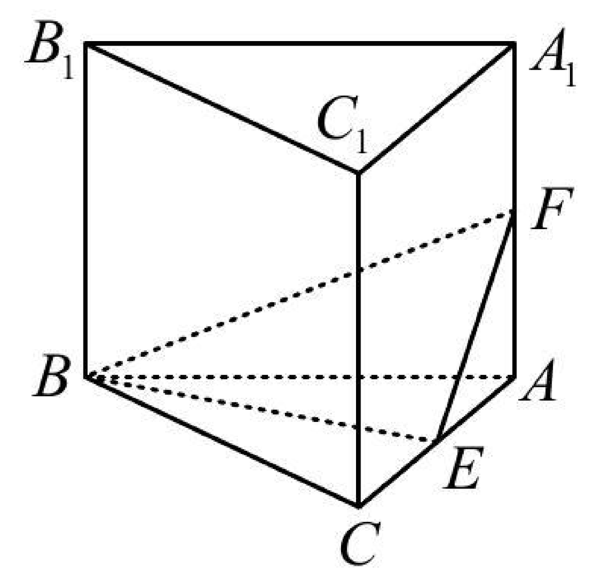
由图可知二面角$B-QD-A$为锐角，故其余弦值为$\dfrac{2}{3}$.



5.（2023•山东模拟•★★★）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，E，F 分别是线段 AC，AA_1 的中点，$\angle BCA=\angle BAC$.

（1）求证：平面 $BEF\perp$平面 ACC_1A_1；

（2）若$\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且二面角$A-BF-E$的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，求$\dfrac{AA_1}{AC}$的值.



解：(1)（要证面面垂直，先找线面垂直，直三棱柱中，面$ABC\perp$面ACC_1A_1，故只需在面ABC内找交线AC的垂线，由面面垂直的性质定理，它必与面ACC_1A_1垂直，观察发现可选BE）

因为$\angle BCA=\angle BAC$，所以$BA=BC$，又E为AC的中点，所以$BE\perp AC$ ①，

因为$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，所以$AA_1\perp$平面ABC，又$BE\subset$平面ABC，所以$BE\perp AA_1$ ②，

由①②结合AC，AA_1是平面ACC_1A_1内的相交直线可得$BE\perp$平面ACC_1A_1，

又$BE\subset$平面BEF，所以平面$BEF\perp$平面ACC_1A_1.

(2)（第 1 问证明了$BE\perp$平面ACC_1A_1，故可以E为原点建系处理，写点的坐标需要长度，所给条件是角度，它与图形的大小无关，只与形状有关，故可将BC设为具体数值，将AA_1设为未知数，为了便于计算，由所给的$\cos\angle ACB$将BC设为$\sqrt{5}$）

以E为原点建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设$BC=\sqrt{5}$，$AA_1=2a(a>0)$，

则 $CE = BC \cdot \cos\angle ACB = 1$， $AE = CE = 1$， $AC = 2CE = 2$， $BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = 2$，

所以 $A(0,-1,0)$， $B(2,0,0)$， $F(0,-1,a)$， $E(0,0,0)$，故 $\overrightarrow{BF} = (-2,-1,a)$， $\overrightarrow{AB} = (2,1,0)$， $\overrightarrow{EB} = (2,0,0)$，

设平面 ABF 和平面 BEF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m} = (x_1, y_1, z_1)$， $\boldsymbol{n} = (x_2, y_2, z_2)$，

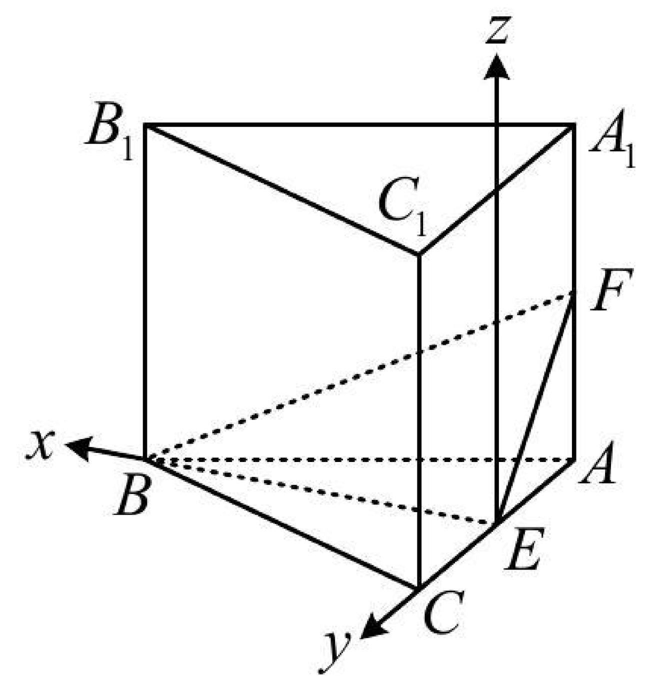
则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BF} = -2x_1 - y_1 + az_1 = 0 \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$，令 $x_1 = 1$，则 $\begin{cases} y_1 = -2 \\ z_1 = 0 \end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m} = (1,-2,0)$ 是平面 ABF 的一个法向量，

$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BF} = -2x_2 - y_2 + az_2 = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 2x_2 = 0 \end{cases}$，令 $y_2 = a$，则 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n} = (0,a,1)$ 是平面 BEF 的一个法向量，

由图可知二面角 $A-BF-E$ 为锐角，且由题意，其余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，

所以 $|\cos < \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} >| = \dfrac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \dfrac{|-2a|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2+1}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，

结合 $a > 0$ 可解得： $a = 3$，所以 $\dfrac{AA_1}{AC} = \dfrac{2a}{2} = 3$.

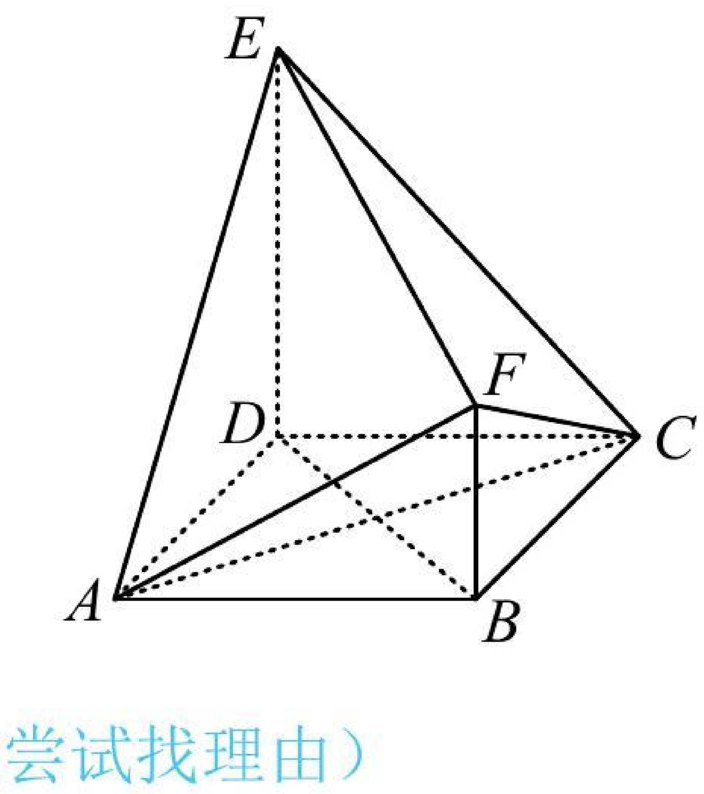


【反思】已知二面角求其余量，仍然先算两个半平面的法向量，用它们的夹角余弦建立方程求解未知数.

6.（2023•四川成都石室中学模拟•★★★）如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD = 60^{\circ}$，$ED \perp$ 平面 $ABCD$，$FB // ED$， $BD = ED = 2FB$.

（1）求证：平面 $BDEF \perp$ 平面 AFC；

（2）求二面角 $A-EF-C$ 的余弦值.



解：（1）（要证面面垂直，先找线面垂直，观察图形可猜想 $AC \perp$ 平面 $BDEF$，故尝试找理由）

因为 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC \perp BD$ ①，

又 $ED \perp$ 平面 $ABCD$， $AC \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC \perp ED$ ②，

由①②结合 BD，ED 是平面 $BDEF$ 内的相交直线可得 $AC \perp$ 平面 $BDEF$，

又 $AC \subset$ 平面 AFC，所以平面 $BDEF \perp$ 平面 AFC.

（2）设 $AC \cap BD = O$，以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设 $BD = ED = 2$，则 $BF = 1$，

因为 $\angle BAD=60^{\circ}$，且 $ABCD$ 为菱形，所以 ΔABD 和 ΔBCD 都是正三角形，故 $OA=OC=\sqrt{3}$，$OB=OD=1$，

所以 $A(\sqrt{3},0,0)$， $E(0,-1,2)$， $F(0,1,1)$， $C(-\sqrt{3},0,0)$，

故 $\overrightarrow{EA}=(\sqrt{3},1,-2)$， $\overrightarrow{EF}=(0,2,-1)$， $\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},1,1)$，

设平面 AEF 和平面 CEF 法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$， $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA}=\sqrt{3}x_1+y_1-2z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=2y_1-z_1=0\end{cases}$，

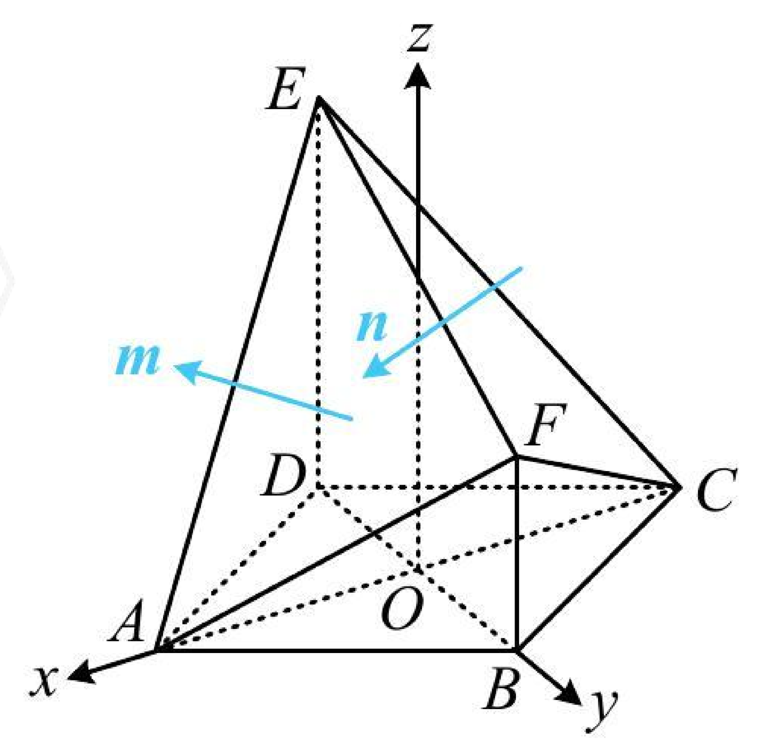
令 $z_1=2$，则 $\begin{cases}x_1=\sqrt{3}\\ y_1=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,2)$ 是平面 AEF 的一个法向量，

（由于从图上不易看出所求二面角的钝锐，所以求法向量时让一个朝外一个朝内，观察发现上述 $\boldsymbol{m}$ 是朝外的，故让 $\boldsymbol{n}$ 朝内，把 z 分量取成负值即可）

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=2y_2-z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=\sqrt{3}x_2+y_2+z_2=0\end{cases}$，令 $z_2=-2$，则 $\begin{cases}x_2=\sqrt{3}\\ y_2=-1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,-2)$ 是平面 CEF 的一个法向量，

故 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times(-1)+2\times(-2)}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{4}$，

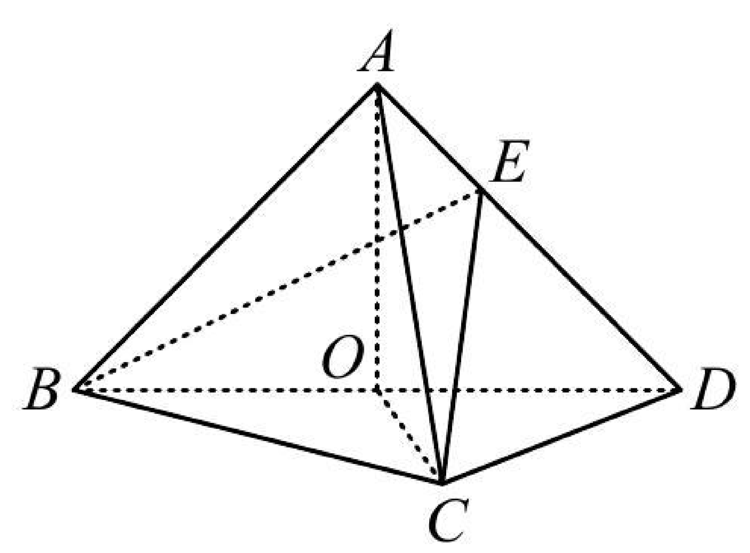
由图可知二面角 $A-EF-C$ 为钝角，故其余弦值为 $-\dfrac{1}{4}$.



7.（2021•新高考 I 卷•★★★）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD， $AB=AD$，O 为 BD 的中点.

（1）证明： $OA\perp CD$；

（2）若 ΔOCD 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



解：（1）因为 $AB=AD$，O 为 BD 中点，所以 $OA\perp BD$，又平面 $ABD\perp$ 平面 BCD， $OA\subset$ 平面 ABD，且平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，所以 $OA\perp$ 平面 BCD，又 $CD\subset$ 平面 BCD，所以 $OA\perp CD$.

（2）（题干的条件没有约束 ΔBCD 的形状，所以第（2）问新增了 ΔOCD 是边长为 1 的正三角形这个条件，故先用它分析 ΔBCD 的形状）

因为ΔOCD是边长为 1 的正三角形，O为BD中点，所以$OC = OD = 1 = \frac{1}{2}BD$，从而$BC \perp CD$，

故$BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{3}$，以$C$为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

（要写点的坐标，还差等腰ΔABD的高AO，算目标体积差的刚好也就是AO，故将其设为变量，并用二面角$E-BC-D$的大小来求它）

设$OA = a(a>0)$，则$D(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$O(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},a)$，

所以$\overrightarrow{CB} = (0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DA} = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},a)$，$\overrightarrow{CD} = (1,0,0)$，

因为$DE = 2EA$，所以$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} = (1,0,0) + (-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}a) = (\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}a)$，

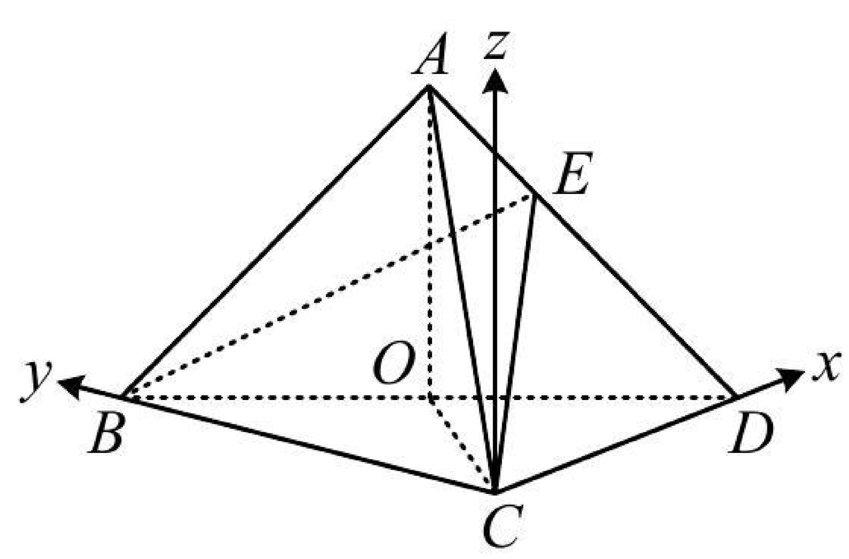
设平面BCE的法向量为$\vec{u} = (x,y,z)$，则$\begin{cases} \vec{u}\cdot\overrightarrow{CB} = \sqrt{3}y = 0 & ① \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{2}{3}az = 0 & ② \end{cases}$，

由①可得$y = 0$，代入②化简可得$x + az = 0$，令$x = a$，则$z = -1$，

所以$\vec{u} = (a,0,-1)$是平面BCE的一个法向量，由图可知，$\vec{v} = (0,0,1)$是平面BCD的一个法向量，

因为二面角$E-BC-D$的大小为45°，所以$|\cos<\vec{u},\vec{v}>| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，解得：$a = 1$或$-1$（舍去），

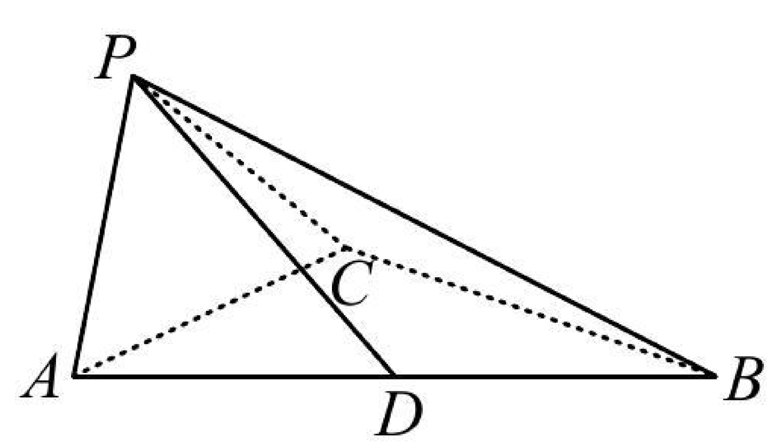
所以三棱锥$A-BCD$的体积$V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\times1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



8．（2023•浙江杭州模拟•★★★★）如图，在三棱锥$P-ABC$中，ΔPAC是正三角形，$AC \perp BC$，$AC = BC = 2$，D是AB的中点.

（1）证明：$AC \perp PD$；

（2）若二面角$P-AC-D$为150°，求直线BC与平面PAB所成角的正弦值.



解：（1）（证线线垂直，应找线面垂直，已有$AC \perp BC$，证结论很可能要用它，但BC与PD异面，怎么办呢？把BC移到与PD共面，包含PD的面就找到了）

如图，取AC中点E，连接PE，DE，因为D为AB中点，所以$DE /\!/ BC$，又$AC \perp BC$，所以$AC \perp DE$，

因为ΔPAC是正三角形，所以$AC \perp PE$，结合PE，$DE \subset$平面PED，$PE \cap DE = E$可得$AC \perp$平面PED，

因为$PD \subset$平面PED，所以$AC \perp PD$.

（2）以E为原点建立如图所示的空间直角坐标系，由（1）知$\angle PED$是二面角$P-AC-D$的平面角，由题意，$\angle PED = 150^\circ$，作$PF \perp DE$的延长线于F，则$\angle PEF = 30^\circ$，

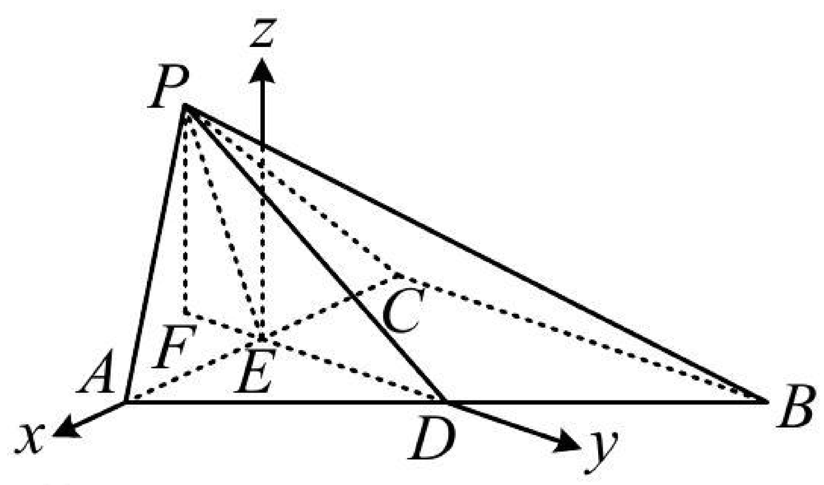
因为$AC = BC = 2$，所以$DE = 1$，$PE = \sqrt{3}$，$EF = PE \cdot \cos\angle PEF = \dfrac{3}{2}$，$PF = PE \cdot \sin\angle PEF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$B(-1,2,0)$，$C(-1,0,0)$，$P(0,-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$A(1,0,0)$，故$\overrightarrow{BC} = (0,-2,0)$，$\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$，$\overrightarrow{AP} = (-1,-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，则$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2x + 2y = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -x - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}$，令$x = \sqrt{3}$，则$\begin{cases} y = \sqrt{3}, \\ z = 5 \end{cases}$

所以$\boldsymbol{n} = (\sqrt{3},\sqrt{3},5)$是平面$PAB$的一个法向量，从而$\left|\cos < \overrightarrow{BC},\boldsymbol{n} >\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC} \cdot \boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\boldsymbol{n}\right|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{31}} = \dfrac{\sqrt{93}}{31}$，

故直线BC与平面PAB所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{93}}{31}$.

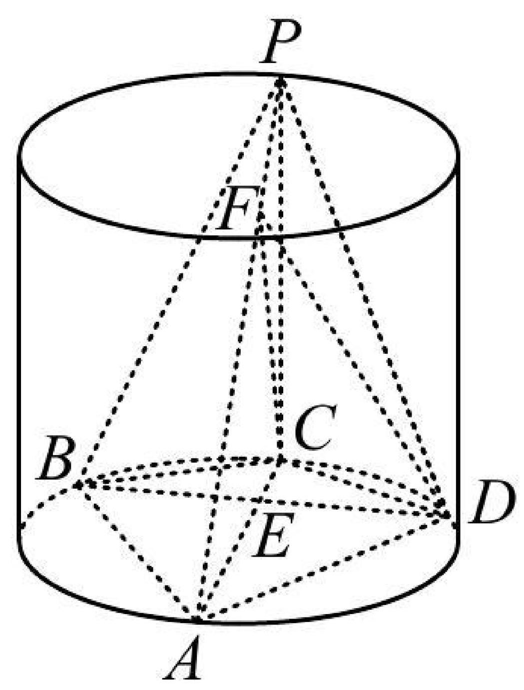


【反思】当图形不那么规则时，建系的原则是尽量让需要用到的点的坐标比较好写.

9.（2023 • 四省联考 • ★★★★）如图，四边形$ABCD$是圆柱底面的内接四边形，AC是圆柱的底面直径，PC是圆柱的母线，E是AC与BD的交点，$AB = AD$，$\angle BAD = 60^\circ$.

（1）记圆柱的体积为V_1，四棱锥$P-ABCD$的体积为V_2，求$\dfrac{V_1}{V_2}$；

（2）设点F在线段AP上，且$PA = 4PF$，$PC = 4CE$，求二面角$F-CD-P$的余弦值.



解：(1)（圆柱和四棱锥的高相等，只需分析它们的底面积关系，即可求得$\dfrac{V_1}{V_2}$，不妨把底面单独画出来看）

如图 1，设AC中点为O，圆O半径为r，因为$AB = AD$，$\angle BAD = 60^\circ$，所以ΔABD为正三角形，

故$AC \perp BD$，且$\angle OBE = 30^\circ$，所以$BE = OB \cdot \cos\angle OBE = \dfrac{\sqrt{3}r}{2}$，$BD = 2BE = \sqrt{3}r$，

故四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 2r\times\sqrt{3}r=\sqrt{3}r^2$，设圆柱的高为 h，则 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\times\sqrt{3}r^2 h}=\sqrt{3}\pi$.

（2）以 C 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，由（1）可得 $OE=OB\cdot\sin\angle OBE=\frac{r}{2}$，$CE=OC-OE=\frac{r}{2}$，

又 $PC=4CE$，所以 $PC=2r$，故 $P(0,0,2r)$，$C(0,0,0)$，$D(\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}r}{2},0)$，$A(2r,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{CD}=(\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}r}{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,2r)$，（还需求 $\overrightarrow{CF}$ 的坐标，可结合 $PA=4PF$ 直接用向量的线性运算求）

因为 $PA=4PF$，所以 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{CP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}=(0,0,2r)+\frac{1}{4}(2r,0,-2r)=(\frac{r}{2},0,\frac{3r}{2})$，

设平面 PCD，FCD 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{r}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}r}{2}y_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=2rz_1=0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $y_1=-1$，故 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,0)$ 是平面 PCD 的一个法向量，

又 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{r}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}r}{2}y_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=\frac{r}{2}x_2+\frac{3r}{2}z_2=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ x_2+3z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=3$，则 $\begin{cases}y_2=-\sqrt{3}\\ z_2=-1\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(3,-\sqrt{3},-1)$ 是平面 FCD 的一个法向量，从而 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{3}}{2\times\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，

由图可知二面角 $F-CD-P$ 为锐角，故其余弦值为 $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

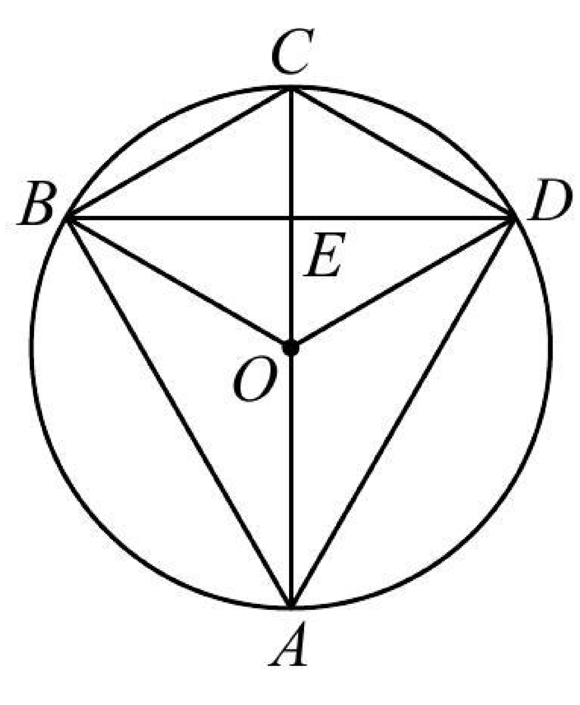


图1

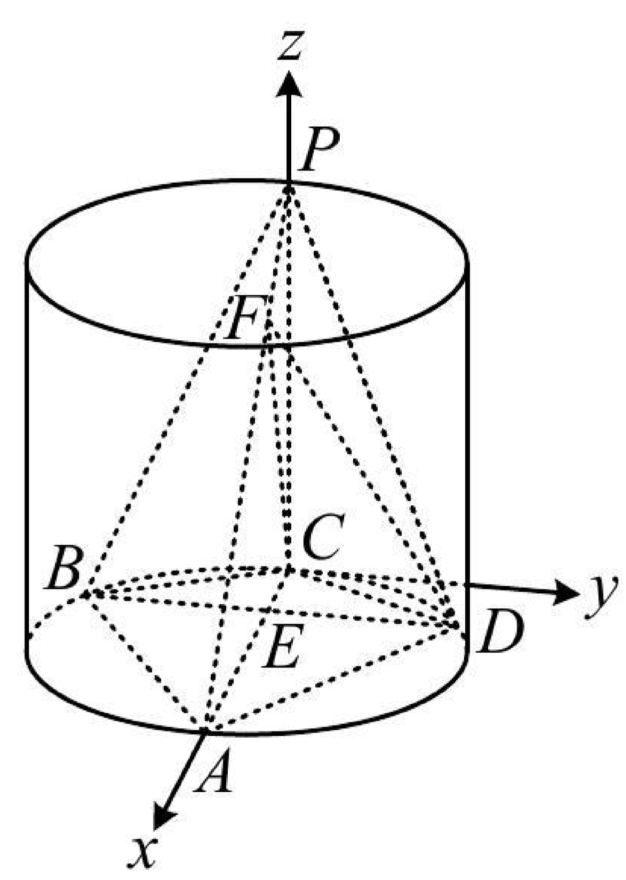


图2